Квазимногочлены

Сдавать до 16.10.17

Задача 1°. Найдите в явном виде и изобразите на комплексной плоскости корни квазимногочлена $q(s) = s^4e^{2s} + 2s^2e^{2s} - 2s^4e^s - 4s^2e^s - 3s^4 - 6s^2$.

Задача 2°. Для следующих квазимногочленов постройте диаграммы распределения, схематически изобразите ветви асимптотических корней и определите, к какому типу они относятся.

- $q(s) = s^2 + 1 + e^s(s^2) + e^{2s}(s^3 - 3s^2 + 1) + e^{4s}$
- $q(s) = s^6 + 3s^3 + 2s + se^s + e^{5s}$
- $q(s) = s - 2 + 2se^s + e^{2s}(s^2 - 3s + 1) + e^{\sqrt{5}s}(s^2 - 3s + 1) + e^{5s}(s^2 - 3s)$

Задача 3$^{@}$. Изобразите на комплексной плоскости корни квазимногочленов из Задачи 2.

Задача 4. Используя принцип аргумента, определите число нулей с положительной действительной частью для следующих функций.

- $q(s) = 1 + s + s^5$
- $q(s) = 1 + s + \frac{s^2}{2!} + \frac{s^3}{3!}$

Задача 5. Используя теорему Руше, докажите, что функция $f(s) = s^n + \varepsilon e^s$ имеет n нулей, стремящихся к началу координат при $\varepsilon \to 0$.

Задача 6. Докажите, не используя теорему об асимптотическом распределении корней квазимногочлена, что если для последовательности корней $\{\lambda_k\}$ квазимногочлена запаздывающего типа $|\lambda_k| \to \infty$, то $\operatorname{Re}\lambda_k \to -\infty$.

Задача 7. Член $as^{m_0}e^{\beta_0 s}$ квазимногочлена называется *главным*, если для любого другого члена $bs^{m_i}e^{\beta_j s}$ выполнены неравенства $m_0 \geqslant m_i$, $\beta_0 \geqslant \beta_j$, причем хотя бы одно из них строгое. Докажите, используя диаграммы распределений, **теорему Понтрягина**:
Если квазимногочлен не имеет главного члена, то у него найдутся корни со сколь угодно большой вещественной частью.