Непараметрические методы идентификации линейных объектов

Гончаров Олег Игоревич

Факультет вычислительной математики и кибернетики
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Москва

Модель идентифицируемого объекта

$$y(t) = \int_0^{+\infty} g_c(\tau) u(t-\tau)\, d\tau$$

Дискретное время $t_k = kT$, T — выборочный интервал:

$$u(t) = u_k, \text{ при } kT \le t \le (k+1)T,$$

$$y[lT] = \sum_{i=1}^{\infty} g[iT]u[(l-i)T], \text{ где } g(t) \stackrel{def}{=} \int_t^{t+T} g_c(\tau)\, d\tau.$$

Вводим оператор опережения $Eu(t) = u(t+T)$,

$$y[lT] = \left(\sum_{k=1}^{\infty} g[kT]E^{-k} \right) u[lT],$$

$$y[lT] = G(E)u[lT], \text{ где } G(E) \stackrel{def}{=} \sum_{k=1}^{\infty} g[kT]E^{-k}.$$

Модель идентифицируемого объекта

$$y[lT] = G(E)u[lT], \text{ где } G(E) \stackrel{def}{=} \sum_{k=1}^{\infty} g[kT]E^{-k}.$$

Переходим к Z-изображениям:

$$Y(z) = G(z)U(z), \text{ где } G(z) \stackrel{def}{=} \sum_{k=1}^{\infty} g[kT]z^{-k}.$$

Объект называется устойчивым (строго устойчивым), если

$$\sum_{k=1}^{\infty} g[kT] < \infty \quad \left(\sum_{k=1}^{\infty} kg[kT] < \infty \right).$$

Утверждение

Если передаточная функция $G(z)$ дробно-рациональная и асимптотически устойчива, то объект строго устойчив.

Модель помехи

$$y[lT] = G(E)u[lT] + v[lT],$$

где $v[lT]$ — помеха.

- Шум наблюдения. Датчики-измерители сигналов подвержены влиянию шума и дрейфа.
- Неконтролируемые входы. В системе есть не измеряемые входные сигналы.

$$v[lT] = \sum_{k=0}^{\infty} h[kT]e[(l-k)T],$$

где $e[kT]$ — белый шум, т.е. последовательность случайных величин:

- взаимно независимых,
- имеющих одинаковое распределение.

$$\boxed{y[lT] = G(E)u[lT] + H(E)e[lT].}$$

Непараметрические методы идентификации

- Анализ импульсной реакции: вход — функция Хэвисайда, оцениваем переходную характеристику.
- Корреляционный анализ: вход — белый шум, оцениваем импульсную характеристику.

$$\bar{E}y(t)u(t-\tau) = R_{yu}(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} g(k)R_u(k-\tau)$$

  В силу эргодических теорем оцениваем ковариации при помощи конечных сумм.
- Частотный анализ.
- Гармонический анализ Фурье.
- Спектральный анализ.

Частотный анализ

Вход — гармонический сигнал с частотой ω и амплитудой α.

Оценка передаточной функции (см. теорему о преобразовании периодограмм):

$$\hat{G}(e^{j\omega}) = \frac{Y_N(\omega)}{U_N(\omega)} = \frac{Y_N(\omega)}{\sqrt{N}\alpha}.$$

Та же оценка, полученная ковариационным методом:

$$|\hat{G}(e^{j\omega})| = \frac{2}{\alpha}\sqrt{I_c^2(N) + I_s^2(N)}, \quad \arg \hat{G}(e^{j\omega}) = \operatorname{arctg} \frac{I_s(N)}{I_c(N)},$$

где $I_c(N) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} y(t)\cos\omega t$, $I_s(N) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} y(t)\sin\omega t$

- $v(t)$ не имеет составляющих с частотой ω $\Rightarrow$ мат. ожидание ошибки стремится к нулю,
- $v(t)$ стационарный, $\sum |\tau R_v(\tau)| < \infty$ $\Rightarrow$ дисперсия ошибки стремится к нулю.

Гармонический анализ Фурье

$$y(t) = G(E)u(t) + v(t),$$

где $u(t)$ — известный вход, $v(y)$ — стационарный с.п.

Эмпирическая оценка ПФ:

$$\hat{\hat{G}}_N(e^{j\omega}) = \frac{Y_N(\omega)}{U_N(\omega)}$$

Теорема

Пусть $G(E)$ строго устойчива, $u(t)$ и $v(t)$ независимы, $|u(t)| < C$, $E\,v(t) = 0$, $\sum \tau R_v(\tau) < \infty$, тогда

$$E\,\hat{\hat{G}}_N(e^{j\omega}) = G(e^{j\omega}) + \frac{\rho_1(N)}{U_N(\omega)},$$

$$E[\hat{\hat{G}}_N(e^{j\omega}) - G(e^{j\omega})][\hat{\hat{G}}(e^{-j\xi}) - G(e^{-j\xi})] = \begin{cases} \frac{\Phi_v(\omega)+\rho_2(N)}{|U_N(\omega)|^2}, & \text{при } \xi = \omega, \\ \frac{\rho_2(N)}{U_N(\omega)U_N(-\xi)}, & \text{при } \xi \neq \omega, \end{cases}$$

где $|\rho_1(N)| \leq C_1/\sqrt{N}$, $|\rho_2(N)| \leq C_2/N$.

Гармонический анализ Фурье

Построение модели возмущения:

$$v(t) = H(E)e(t),$$

где $e(t)$ — белый шум.

Теорема

Пусть $H(E)$ строго устойчива, $e(t)$ обладает дисперсией λ и конечным четвертым моментом, тогда

$$E\,|V_N(\omega)|^2 = \Phi_v(\omega) + \rho_3(N),$$

$$E[|V_N(\omega)|^2 - \Phi_v(\omega)][|V_N(\xi)|^2 - \Phi_v(\xi)] = \begin{cases} [\Phi_v(\omega)]^2 + \rho_4(N), & \text{при } \xi = \omega, \\ \rho_4(N), & \text{при } \xi \neq \omega, \end{cases}$$

где $|\rho_3(N)| \leq C_3/N$, $|\rho_4(N)| \leq C_4/N$.

Для построения "хороших" оценок, требуется, чтобы математическое ожидание оценки было близко оцениваемой величине, а дисперсия была достаточно мала.

- Оценить значение АФЧХ на частоте ω возможно, только если она присутствует в входном сигнале.
- Периодическое входное воздействие $u(t)$.
  Пусть $N = sN_0$, где N_0 — период сигнала, тогда
  $$|U_N(\omega)| \sim N \cdot const \text{ при } \omega = \frac{2\pi k}{N_0}, k = \overline{1, N_0},$$
  и близко к 0 в других точках.
  Оценка несмещена, дисперсия стремится к 0, оценки разных частот некоррелированы. "Хорошая" оценка построена!
- Входное воздействие — реализация с.п.:
  оценка несмещена, дисперсия стремится к отношению "сигнал/шум", оценкии разных частот некоррелированы.

Спектральный анализ

Предположим, что в диапазоне частот $[\omega - \Delta\omega, \omega + \Delta\omega]$ АФЧХ примерно постоянны.

Введем оценку:

$$\hat{G}_N(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{\xi=\omega-\Delta\omega}^{\omega+\Delta\omega} \alpha(\xi)\hat{\hat{G}}_N(e^{j\xi})}{\sum_{\xi=\omega-\Delta\omega}^{\omega+\Delta\omega} \alpha(\xi)}, \text{ где } \alpha(\omega) = \frac{|U_N(\omega)|^2}{\Phi_v(\omega)},$$

$\alpha(\omega)$ выбирается из соображений минимума дисперсии.

Или с использованием частотного окна $W_\gamma(\omega)$ и предположением $\Phi_v(\omega) \approx const$ на $[\omega - \Delta\omega, \omega + \Delta\omega]$:

$$\hat{G}_N(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{\xi=0}^{2\pi} W_\gamma(\xi-\omega)|U_N(\xi)|^2 \hat{\hat{G}}_N(e^{j\xi})}{\sum_{\xi=0}^{2\pi} W_\gamma(\xi-\omega)|U_N(\xi)|^2},$$

Спектральный анализ

$$\hat{G}_N(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{\xi=0}^{2\pi} W_\gamma(\xi-\omega) Y_N(\omega) \bar{U}_N(\omega)}{\sum_{\xi=0}^{2\pi} W_\gamma(\xi-\omega) |U_N(\xi)|^2} \stackrel{def}{=} \frac{\hat{\Phi}_{yu}^N(\omega)}{\hat{\Phi}_u^N(\omega)}.$$

Примеры частотных окон:

	$2\pi W_\gamma(\omega)$	$w_\gamma(t)$
Бартлетт	$\frac{1}{\gamma}\left(\frac{\sin\gamma\omega/2}{\sin\omega/2}\right)^2$	$1-\frac{\lvert t\rvert}{\gamma}$

Частотное окно можно налагать во временной области:

$$\hat{\Phi}_u^N(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} w_\gamma(\tau) \hat{R}_u^N(\tau) e^{-j\omega\tau},$$

где

$$w_\gamma(\tau) = \int_{-\pi}^{\pi} W_\gamma(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega, \quad \hat{R}_u^N(\tau) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} u(t) u(t-\tau).$$

Оценка спектра возмущения

Введем оценку невязки

$$\hat{v}(t) = y(t) - \hat{G}(E)u(t),$$

тогда

$$\hat{\Phi}_v^N(\omega) = \sum_{\xi=-\pi}^{\pi} W_\gamma(\xi - \omega)|Y_N(\xi) - \hat{G}_N(e^{j\omega})U_N(\xi)|^2,$$

предполагая, что внутри частотного окна $\hat{G}_N(e^{j\xi}) = const$, получаем

$$\hat{\Phi}_v^N(\omega) = \hat{\Phi}_y^N(\omega)\left[1 - \frac{|\hat{\Phi}_{yu}^N(\omega)|^2}{\hat{\Phi}_y^N(\omega)\hat{\Phi}_u^N(\omega)}\right],$$

передаточная функция $H(z)$ восстанавливается по спектру при помощи процедуры спектральной факторизации

$$\hat{\Phi}_v^N(\omega) \approx H(e^{-j\omega})H(e^{j\omega})\lambda.$$

Алгоритм спектральной идентификации

1. Оцениваем переходную характеристику, чтобы приблизительно найти диапазон частот.
2. Готовим входное воздействие, соответствующее диапазону.
3. Проводим эксперимент.
4. Строим спектральные оценки: $\hat{\Phi}_u^N(\omega)$, $\hat{\Phi}_y^N(\omega)$, $\hat{\Phi}_{yu}^N(\omega)$. Выбираем подходящее частотное окно: на графиках оценки АЧХ должен быть достаточно гладок, но $\gamma \ll N$.
5. Восстанавливаем передаточные функции $G(z)$ и $H(z)$.