Лекция 1.
“Математическая модель последовательного манипулятора”

Гончаров Олег Игоревич

Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики
Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова

Москва

Последовательный манипулятор

Последовательный манипулятр — пространственный механизм в виде кинематической цепи из звеньв, образующих кинематические пары с вращательной или поступательной степенью свободы, снабженный приводами и оканчивающийся исполнительным органом.

Задающее воздействие для манипулятора обычно формулируется для его исполнительного органа в системе координат связанной с его основанием — абсолютной (опорной) системе координат.

Структура математическо модели манипулятора:

- Кинематическая модель: связывает координаты ИО в абсолютной системе координат и в относительной системе координат звеньев (Лангранжевы координаты).
- Динамическая модель: динамика манипулятора под воздействием внешних сил и сил создаваемых приводами.
- Модель приводов.

Положения твердого тела в пространстве

Интуитивно понятно, что положение тела задается

1. положением одной его точки — 3 координаты,
2. ориентацией — 3 (?) координаты.

Пусть дана СК $O_i\vec{x}_i\vec{y}_i\vec{z}_i$, свяжем с твердым телом СК $O_j\vec{x}_j\vec{y}_j\vec{z}_j$. Преобразование $O_j\vec{x}_j\vec{y}_j\vec{z}_j \to O_i\vec{x}_i\vec{y}_i\vec{z}_i$ задает положение тверого тела.

Данное преобразование сохраняет расстояния между точками, т.е. является движением.

Движение $O_j\vec{x}_j\vec{y}_j\vec{z}_j \to O_i\vec{x}_i\vec{y}_i\vec{z}_i$ имеет следующую структуру:

$$^j r = {}^j R_i {}^i r + {}^j p_i,$$

где $^j r$, $^i r$ — радиус-вектора, а само преобразования задают

- $^j R_i \in SO(3)$ — матрица вращения (из специальной ортогональной группы), матрица Грамма для реперов i и j
- $^j p_i$ — координаты O_i относительно $O_j\vec{x}_j\vec{y}_j\vec{z}_j$.

Задание ориентации твердого тела

Описание ориентации матрицей вращения ${}^{j}R_i \in SO(3)$ избыточно: 9 координат вместо 3-х.

Существует множество способов задания вращения (движения, при котром положение одно точки остается неизменным):

- углы Эйлера (α, β, γ);
- представление угол-ось $\theta \vec{w}$, где $\vec{w}$ задает ось, а θ — угол поворота;
- единичные кватернионы $\varepsilon = \varepsilon_0 + i\varepsilon_1 + j\varepsilon_2 + k\varepsilon_3$, $\varepsilon\bar{\varepsilon} = 1$;
  Данное представление тесно связано с представлением угол-ось.
  Кватернионы с нулевой вещественной частью представляют вектора. Пусть ρ такой кватернион, тогда результат его вращения на ε выражется
  $$\rho' = \varepsilon\rho\bar{\varepsilon}.$$
- Экспоненциальное представоение $R = e^{S(\vec{w})\theta}$, где $S(\vec{w}) = -S(\vec{w})^T$ — кососимметрическая матрица:
  $$S(\vec{w}) = \begin{bmatrix} 0 & -w_z & w_y \\ w_z & 0 & -w_x \\ -w_y & w_x & 0 \end{bmatrix}$$

Однородные координаты

Для осуществления цепочки преобразований удобно пользоваться однородными координатами:

$$\begin{bmatrix} {}^j r \\ 1 \end{bmatrix} = {}^j T_i \begin{bmatrix} {}^i r \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{где } {}^j T_i = \begin{bmatrix} {}^j R_i & {}^j p_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \; {}^j T_i^{-1} = {}^i T_j = \begin{bmatrix} {}^j R_i^T & -{}^j R_i^T {}^j p_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Другие способы представления движения:

- Любое движение твердого тела представляется как винтовое движение вокруг оси $\vec{w}$, отстоящей от начала координат на ρ, с поворотом на θ и смещением $d\vec{w}$:

$$ {}^j r = {}^i r + d\vec{w} + \sin\theta\, \vec{w} \times ({}^i r - \rho) - (1 - \cos\theta)({}^i r - \rho) - ({}^i r - \rho)\vec{w}\vec{w}.$$

- Экспоненциальное представление: $T = e^{\Xi(\vec{w})\theta}$, где

$$\Xi(\vec{w}) = \begin{bmatrix} S(\vec{w}) & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$