Лекция 15.
“Управление движением мобильных роботов”

Гончаров Олег Игоревич

Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики
Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова

Москва

Постановка задачи

С точки зрения ТАУ существуют следующие постановки задач управления движением:

- Движение по кривой. Задана кривая $\mathcal{C}$, вдоль которой должна двигаться точка корпуса P. Также может быть задана скорость движения v_0.
- Движение по траектории. Задана траектория $(x_r(t), y_r(t))$ или $(x_r(t), y_r(t), \theta_r(t))$, по которой должна двигаться точка корпуса P.
- Стабилизация в заданном положении (x_r, y_r, θ_r).

Не всякая траектория физически реализуема (допустима). Допутимые траектории являются решениями уравнений кинематики робота, поэтому для них можно говорить о существовании программного управления $u_r(t)$.

Мат. модель колесного мобильного робота

Кинематическая модель

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \bar{R}(\theta)\Sigma(\beta_s)u_m, \\ \dot{\beta}_s = u_s, \\ \dot{\beta}_c = D(\beta_c)\Sigma(\beta_s)u_m, \\ \dot{\varphi} = E(\beta_s, \beta_c)\Sigma(\beta_s)u_m, \end{cases} \quad \text{или} \quad \dot{q} = S(q)u,$$

устанавливающая связь между позой робота $q = (\xi^T, \varphi_s^T, \varphi_c^T, \varphi^T)^T$, где

- $\xi = (x, y, \theta)^T$ — положение робота в пространстве,
- β_s, β_c — вектора ориентаций рулевых и рояльных колес,
- φ — вектор углов поворота колес,

и параметризацией пр-ва скоростей $u = (u_m^T, u_s^T)^T$, $\dim u_m = \delta_m$, $\dim u_s = \delta_s$.

Динамическая модель

$$H(q)\dot{u} + F(q, u) = S^T(q)\bar{\tau} = \Gamma(\beta_s, \beta_c)\tau,$$

устанавливающая связь между скоростями u и моментами τ,

- $\bar{\tau}$ — полный вектор сил и моментов,
- $\tau = (\tau_m^T, \tau_s^T)^T$ — моменты приводов, $\dim \tau_s = \delta_s$, $\dim \tau_m \geq \delta_m$.

Управление движением с учетом динамики

Дано управление в виде обратной связи $u = u^*(\xi, \beta, t)$ для кинематической модели.

раздельное управление приводами: каждый исполнительный орган снабжен собственным регулятором, точно отрабатывающим позицию/скорость.

- По кинематической модели $\dot{q} = S(q)u$ строим задающие воздействия для регуляторов: $u_s^*(\xi, \beta, t)$, $\beta_c^*(\xi, \beta, t)$, $\varphi^*(\xi, \beta, t)$.

совместное управление приводами: явно учитывает динамику.

- линеаризация обратной связью (матрица $\Gamma(\beta)$ обратима)

$$\tau = \Gamma(\beta_s, \beta_c)^+ \left[H(q)w + F(q, u) \right],$$

- выберем управление (метод обратной динамики)

$$w = -k(u - u^*(q, t)) + \frac{\partial u^*}{\partial q}(q, t)\dot{q} + \frac{\partial u^*}{\partial t}(q, t),$$

обеспечивающее точную отработку $u^*(\xi, \beta, t)$.

$\boxed{\text{Т.о. задача свелась к управлению кинематической моделью.}}$

Управление движением мобильного робота

Задача управления сведена к управлению кинематикой:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \bar{R}(\theta)\Sigma(\beta_s)u_m, \\ \dot{\beta}_s = u_s. \end{cases}$$

Например, дифференциальный и автомобильный привод:

$$\begin{cases} \dot{x} = u_1 \cos\theta, \\ \dot{y} = u_1 \sin\theta, \\ \dot{\theta} = u_2, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = u_1 \cos\theta, \\ \dot{y} = u_1 \sin\theta, \\ \dot{\theta} = \dfrac{u_1}{L} \operatorname{tg}\beta, \\ \dot{\beta} = u_2. \end{cases}$$

Особенности:

- Если $\delta_m = 3$, задача тривиальна (линеаризация обратной связью).
- Если $\delta_m \leq 2$, то система неголономна, и возникают проблемы. Например, по теореме Брокетта задача стабилизации не решается в классе стационарных непрерывных обратных связей.

Движение по заданной кривой

Система координат Френета

Способ задния ошибки регулирования при движении вдоль кривой.

- $\mathcal{C} = \{\gamma(s)\}$ — кривая параметризованная длиной s с кривизной $c(s) = |\ddot{\gamma}(s)|$.
- P — точка корпуса, движением которой мы управляем.
- P_s — ортогональная проекция P на кривую $\mathcal{C}$. Если $d(P, \mathcal{C}) < R(s) = \frac{1}{c(s)}$, определяется однозначно.

В системе координат Френета положение робота описывется координатами (s, d, θ_e):

- s — криволинейная координата P_s. Значение параметра s кривой, соответствующее точке P_s.
- d — длина отрезка PP_s (расстояние от P до кривой).
- $\theta_e = \theta - \theta_s$.

Цель управления: $d = 0$.

Выпишем уравнения кинематики точки корпуса робота P.

- Система координат $O\mathbf{ij}$ связана с землей.
- СК $P_s\mathbf{i}_s\mathbf{j}_s$ связана с кривой, $\mathbf{i}_s$ направлен по касательной.
- СК $P_m\mathbf{j}_m\mathbf{j}_m$ связана с роботом, P_m — точка корпуса, расположена на середине оси колес робота, $\mathbf{i}_m$ направлен вперед.
- Точка P имеет координаты (l_1, l_2) относительно $P_m\mathbf{j}_m\mathbf{j}_m$.

$$\vec{OP_s} + \vec{P_sP} = \vec{OP_m} + \vec{P_mP},$$
$$\vec{OP_s} + d\mathbf{j}_s = \vec{OP_m} + l_1\mathbf{i}_m + l_2\mathbf{j}_m.$$

Продифференцируем:

$$\frac{d}{dt}OP_s = \dot{s}\mathbf{i}_s, \quad \frac{d}{dt}P_sP = \frac{d}{dt}(d\mathbf{j}_s) = \dot{d}\mathbf{j}_s - dc(s)\dot{s}\mathbf{i}_s,$$
$$\frac{d}{dt}OP_m = u_1\mathbf{j}_m, \quad \frac{d}{dt}P_mP = \frac{d}{dt}(l_1\mathbf{j}_m + l_2\mathbf{j}_m) = l_1u_2\mathbf{j}_m - l_2u_2\mathbf{i}_m.$$
$$(\dot{\mathbf{j}}_s = -c(s)\dot{s}\mathbf{i}_s, \quad \dot{\mathbf{i}}_m = \dot{\theta}\mathbf{j}_m = u_2\mathbf{j}_m, \quad \dot{\mathbf{j}}_m = -\dot{\theta}\mathbf{i}_m = -u_2\mathbf{i}_m).$$

После подстановки, учитывая

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i}_m \\ \mathbf{j}_m \end{bmatrix} = R(-\theta) \begin{bmatrix} \mathbf{i}_s \\ \mathbf{j}_s \end{bmatrix},$$

и приравнивая выражения при ортах $\mathbf{i}_s$ и $\mathbf{j}_s$, получим уравнения кинематики в системе координат Френета

$$\begin{cases} \dot{s} = \dfrac{1}{1 - dc(s)} \left[(u_1 - l_2 u_2) \cos\theta_e - l_1 u_2 \sin\theta_e \right], \\ \dot{d} = (u_1 - l_2 u_2) \sin\theta_e + l_1 u_2 \cos\theta_e, \\ \dot{\theta}_e = u_2 - c(s)\dot{s}. \end{cases}$$

При $1 > dc(s) = \frac{d}{R(s)}$ первое уравнение теряет смысл.

Движение по заданной кривой

Управление без контроля ориентации

Задана кривая $\mathcal{C}$, с ней связана сист. координат Френета. $l_2 = 0$, $l_1 \neq 0$.

Метод обратной динамики: назначаем динамику ошибки d

$$\dot{d} = -l_1 u_1 k(d, \theta_e) d,$$

выражаем управление

$$u = -\frac{u_1}{l_1 \cos\theta_e} \sin\theta_e - \frac{u_1}{\cos\theta_e} k(d, \theta_e) d.$$

Если выполнены условия

- знак скорости и l_1 совпадает: $l_1 u_1 > 0$,
- непрерывная $k(d, \theta_e) > 0$, при $|\theta_e| = \frac{\pi}{2}$ $k(d, \theta_e) = 0$,
- начальные условия $|\theta_e(0)| < \frac{\pi}{2}$, $\frac{l_1 c_{max}}{1 - |d(0)| c_{max}} < 1$,
- условие возбуждения $\int_0^t u_1(s) ds \to +\infty$ при $t \to +\infty$

тогда

замкнутая система устойчива, $|\theta_e(t)| < \dfrac{\pi}{2}$ и $d \to 0$.

Доказательство основано на анализе знака $\dot{\theta}_e$ при $|\theta_e| \to \frac{\pi}{2}$

Движение по заданной траектории

Управление без контроля ориентации

Задана траектория $(x_r(t), y_r(t))$. $l_2 = 0$, $l_1 \neq 0$.

Кинематика точки P описывается уравнениями (подставить Ox вместо кривой $\mathcal{C}$):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_P \\ \dot{y}_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -l_1 \sin\theta \\ \sin\theta & l_1 \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = A(\theta)u.$$

Т.к. матрица в невырождена, система линеаризуется обратной связью:

$$\text{положим } u = A(\theta)^{-1} w \quad \text{тогда} \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_P \\ \dot{y}_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix},$$

применяя метод обратной динамики для ошибки регулирования $e = (x_P, y_P)^T - (x_r, y_r)^T$, получим управления

$$\begin{aligned} w_1 &= \dot{x}_r - k_1(x_P - x_r), \\ w_2 &= \dot{y}_r - k_2(y_P - y_r). \end{aligned}$$

Цепочечная форма

В системе координат Френета

Пусть $l_1 = l_2 = 0$ (т.е. P и P_m совпадают), преобразоване

$$\begin{aligned} (z_1, z_2, z_3) &= (s, d, [1 - dc(s)] \operatorname{tg} \theta_e), \\ (v_1, v_2) &= (\dot{z}_1, \dot{z}_3) \end{aligned} \tag{1}$$

приводит систему к цепочечной форме

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = v_1, \\ \dot{z}_2 = v_1 z_3, \\ \dot{z}_3 = v_2. \end{cases}$$

В исходной системе координат для кинематической модели

$$\begin{cases} \dot{x} = u_1 \cos\theta, \\ \dot{y} = u_1 \sin\theta, \\ \dot{\theta} = u_2, \end{cases}$$

преобразование имеет вид $\quad (z_1, z_2, z_3) = (x, y, \operatorname{tg}\theta).$

Движение по заданной кривой

Управление с контролем ориентации

Задана кривая $\mathcal{C}$, $l_1 = l_2 = 0$.

В цепочечной форме кинематика точки P описывается системой

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = v_1, \\ \dot{z}_2 = v_1 z_3, \\ \dot{z}_3 = v_2. \end{cases}$$

Выберем линейную обратную связь

$$v_2 = -v_1 k_2 z_2 - |v_1| k_3 z_3, \quad k_2 > 0,\ k_3 > 0.$$

Доказательство устойчивости основано на использовании функциии Ляпунова

$$V(z) = \frac{1}{2}(z_2^2 + \frac{1}{k_2} z_3^2),$$

при условии $V(z(0)) < \frac{1}{2c_{max}^2}$ $V(z) \to 0$ и $|dc(s)| < 1$.

Задана допустимая траектория $(x_r(t), y_r(t), \theta_r(t)$, ей соответствует управления $(u_{1r}(t), u_{2r}(t))$. $l_1 = l_2 = 0$.

Ошибка регулирования — положение робота относительно желаемого положения робота:

$$\begin{bmatrix} x_e \\ y_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_r & \sin\theta_r \\ -\sin\theta_r & \cos\theta_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_r \\ y - y_r \end{bmatrix}$$

Продифференцировав эти уравнения, учитывая

$$\begin{cases} \dot{x} = u_1 \cos\theta, \\ \dot{y} = u_1 \sin\theta, \\ \dot{\theta} = u_2, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_r = u_{r1} \cos\theta_r, \\ \dot{y}_r = u_{r1} \sin\theta_r, \\ \dot{\theta}_r = u_{r2}, \end{cases}$$

получим динамику ошибки

$$\begin{cases} \dot{x}_e = u_{2r} y_e + u_1 \cos\theta_e - u_{1r}, \\ \dot{y}_e = -u_{2r} x_e + u_1 \sin\theta_e, \\ \dot{\theta}_e = u_2 - u_{2r}. \end{cases}$$

Перейдем к цепочечной форме $(x_e, y_e, \operatorname{tg}\theta_e) = (z_1, z_2, z_3)$

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = u_{2r} z_2 + w_1 - u_{1r}, \\ \dot{z}_2 = -u_{2r} z_1 + w_1 z_3, \\ \dot{z}_3 = w_2, \end{cases}$$

где $w_1 = u_1 \cos\theta_e$, $w_2 = \frac{u_2 - u_{2r}}{\cos^2\theta_e}$.

Выберем закон управления $(k_1, k_2, k_3 > 0)$

$$\begin{aligned} w_1 &= u_{1r} - k_1 |u_{1r}| (z_1 + z_2 z_3), \\ w_2 &= -k_2 u_{1r} z_2 - k_3 |u_{1r}| z_3. \end{aligned}$$

Доказательство основано на функции Ляпунова

$$V(z) = \frac{1}{2}(z_1^2 + z_2^2 + \frac{1}{k_2} z_3^2).$$

Движение по кривой и траектории: обсуждение

- Все рассмотренные методы имеют особенности при $|\theta_e| = \frac{\pi}{2}$.
- Характеристики методов сведены в таблицу:

Задающее воздействие	**Положение точки P**	**Система координат**	**Управления**	**Результат**
кривая $\mathcal{C} = \{(x_s(s), y_s(s)\}$	$l_1 \neq 0$, $l_2 = 0$	Френета	u_2, $u_1 = const$	$d \to 0$, θ_e ограничено
траектория $(x_r(t), y_r(t))$	$l_1 \neq 0$, $l_2 = 0$	абсолютная	u_1, u_2	$x_P - x_r \to 0$, $y_P - y_r \to 0$
кривая $\mathcal{C} = \{(x_s(s), y_s(s)\}$	$l_1 = 0$, $l_2 = 0$	Френета, цепочечная форма	u_2, $u_1 = const$	$d \to 0$, $\theta_e \to 0$
траектория $(x_r(t), y_r(t), \theta_r(t))$	$l_1 = 0$, $l_2 = 0$	абсолютная, цепочечная форма	u_1, u_2	$x_P - x_r \to 0$, $y_P - y_r \to 0$, $\theta - \theta_r \to 0$

Стабилизация в заданном положении

По теореме Брокетта не существует непрерывной стационарной обратной связи по состоянию, решающей задачу.

Подходы:

- **Нестационарная непрерывная обратная связь.**
- **Разрывные обратные связи.**
- **Гибридные системы.** Непрерывная + дискретная система.

Проблемы:

- Робастность при сохранении экспоненциальной устойчивости:
  - либо метод неробастен: при малом изменении параметоров или сигналов теряется свойство асимптотической устойчивости нуля (но сохраняется устойчивость окрестности),
  - либо сходимость медленная.
- Отработка (приблизительная) недопустимых траекторий.
- Не существует универсальная обратная связь, стабилизирующая любую допустимую траекторию.

Задача стабилизации в нуле для системы в цепочечной форме:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = v_1, \\ \dot{z}_2 = v_1 z_3, \\ \dot{z}_3 = v_2. \end{cases}$$

Обратная связь $k_1, k_2, k_3, \alpha > 0$

$$v_1 = -k_1 z_1 + \alpha \|(z_2, z_3)\| \sin t,$$
$$v_2 = -v_1 k_2 z_2 - |v_1| k_3 z_3.$$

решает задачу асимптотической стабилизации в нуле $(V(z) = \frac{1}{2}(z_2^2 + \frac{1}{k_2} z_3^2))$.

- Полиномиальня скорость сходимости, т.к. закон управления — липшицева функция.
- Можно сделать закон управления нелипшицевой функцией и добиться экспоненциальной сходимости, но тогда при малых изменениях параметров ОУ система начнет осцилировать в

$$
v(t) = \bar{v}[z(kT), t], \quad t \in [kT, (k+1)T],
$$

$$
\bar{v}_1(z,t) = \frac{1}{T}[(k_1 - 1)z_1 + 2\pi\rho(z)\sin(\omega t)],
$$

$$
\bar{v}_2(z,t) = \frac{1}{T}[(k_3 - 1)z_3 + 2(k_2 - 1)\frac{z_2}{\rho(z)}\cos(\omega t)],
$$

где

$$
k_1, k_2, k_3 \in (-1, 1), \quad , \omega = \frac{2\pi}{T},
$$

$$
\rho(z) = \alpha_2 |z_2|^{1/2}, \quad \alpha_2 > 0.
$$

Обеспечивает экспоненциальную сходимость к нулю, но не обеспечиает устойчивость.