Лекция 4.
“Ведение в теорию управления, ч.1”

Гончаров Олег Игоревич

Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики
Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова

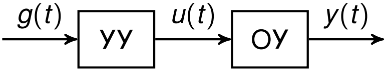
Москва

Основные понятия

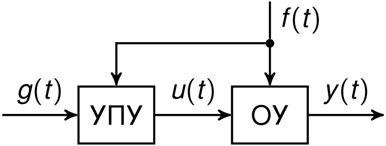
Управление — целенаправленное воздействие на что-либо.
Объект управления (ОУ) — то, на что воздействуем.
Цель управления — обеспечение заданного режима функционирования для ОУ.
Устройство управления (УУ) — формирует управляющее воздействие (управление) в соответствие с цель, в простых случаях его называют регулятором.
Система управления (СУ) — объект управления + управляющее устройство.
Сигнал — физический носитель информации.
Грубость системы управления — свойства системы управления не меняются при малом изменении параметров системы.
Физическая реализуемость — принципиальная реализуемость математической модели в виде реального объекта.

Принципы управления

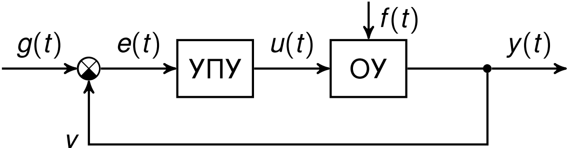
- **Принцип программного управления**



- **Принцип компенсации**



- **Принцип обратной связи**



Классификация систем управления

По задающему воздействию

- системы стабилизации $g = const$;
- системы программного управления $g = g(t)$, известна заранее;
- системы слежения, $g(t)$ заранее неизвестно.

По типам сигналов

- непрерывные;
- дискретные: сигнал квантован
  - по времени (импульсные),
  - по уровню (релейные, квантованные),
  - по уровню и по времени (цифровые).

По уравнениям

- линейные
$$W[\alpha u_1 + \beta u_2] = \alpha W[u_1] + \beta W[u_2];$$
- нелинейные.

Математическое описание непрерывных СУ

$$y(t) = [Au(\cdot)](t),$$

где $u(t)$ — входной сигнал, $y(t)$ — выходной, A — оператор ОУ.

Объект статический, если $y(t)$ зависит только от значений $u(t)$.

Объект динамический, если $y(t)$ зависит от значений u на $[t_0, t]$. Можно ввести понятие состояния объекта $x(t)$:

$$y(t) = h(x(t), u(t)) \text{ — уравнение выхода,} \quad (1)$$

$$x(t) = f(x(t_0), u_{[t_0,t]}, t) \text{ — уравнение состояния.} \quad (2)$$

Такой объект называют динамическими системой (ДС), чаще всего их описывают при помощи ДУ:

$$\dot{x} = f(x, t, u),$$
$$y = h(x, t, u).$$

Уравнение вход-выход

Связь входа $u(t)$ и выхода $y(t)$ системы задана уравнением

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\dots+a_1\dot{y}+a_0y = b_mu^{(m)}+b_{n-1}u^{(m-1)}+\dots+b_1\dot{u}+b_0u$$

Символьная запись оператора дифференцирования по времени:

$$p = \frac{d}{dt}.$$

Вход-выход в символьной записи:

$$(p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_0)y = (b_mp^m + \dots + b_0)u,$$

$$\alpha(p)y = \beta(p)u,$$

$$y = W(p)u.$$

Уравнение в пространстве состояния

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{3}$$
$$y = Cx, \tag{4}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, полностью характеризующий внутреннее состояние системы; $y \in \mathbb{R}^l$ — выход; $u \in \mathbb{R}^m$ — управление; $A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ B \in \mathbb{R}^{n\times m},\ C \in \mathbb{R}^{l\times m}$ — известные матрицы.

Наиболее полное описание: включает неуправляемые и ненаблюдаемые части системы, не включаемые уравнением вход-выход.

Definition

Система называется **вполне управляемой по состоянию,** если для любых двух состояний x_0 и x_1 и отрезка времени $T = [t_0, t_1]$ существует управление $u(t)$ переводящее ее из состояния x_0 в x_1.

Матрица управляемости

$$K_{A,b} = \begin{bmatrix} b & Ab & \dots & A^{n-1}b \end{bmatrix}$$

Критерий управляемости: вполне управляема тогда и только тогда, когда $\mathrm{rank}\, K_{A,b} = n$.

Definition

Система называется **вполне наблюдаемой по состоянию,** если по выходу и входу системы на отрезке времени $T = [t_0, t_1]$ можно восстановить состояние системы в момент времени t_1.

Оригинал — вещественнозначная функция $x(t)$, $x(t) = 0$ при $t < 0$, интегрируема, $|x(t)| < Ce^{\gamma t}$.

$$X(s) = L\{x(t)\} = \int_0^{+\infty} x(t) e^{-st} dt. \tag{5}$$

Изображение — комплексная функция $X(s)$, определена при $\operatorname{Re} s > \gamma$

$$x(t) = L^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma_0 - j\infty}^{\gamma_0 + j\infty} x(t) e^{st} ds. \tag{6}$$

При $s = j\omega$ преобразование Лапаласа превращается в преобразование Фурье.

Передаточная функция

Преобразование Лапаласа

Свойства преобразования Лапаласа

1. Линейность.
2. $L\{x(t)\} = sX(t) - x(0)$.
3. $L\{\int_0^t x(\tau)d\tau\} = \frac{X(s)}{s}$.
4. $L\{x(t-\tau)\} = e^{-\tau s}X(s)$.

Оригинал	Изображение
$\delta(t)$	1
$1(t)$	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s+\alpha}$
$\sin\omega t$	$\frac{1}{s^2+\omega^2}$

Передаточная функция

Применяя преобразование Лапласа к уравнению вход-выход (при нулевых начальных условиях) получаем:

$$Y(s) = \frac{\beta(s)}{\alpha(s)} U(s) = W(s)U(s). \quad (7)$$

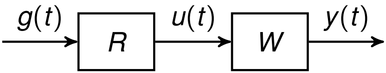
Definition

Передаточная функция $W(s)$ — отношение изображений выхода и входа ДС при нулевых начальных условиях.

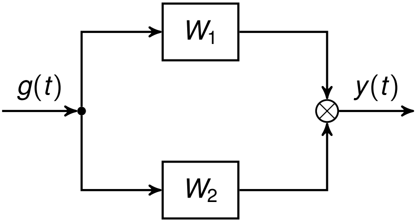
Относительный порядок $r = n - m$, нули, полюса.
Сокращение нулей и полюсов — нарушение условия управляемости или наблюдаемости, может вести к потере грубости.

Структурные схемы

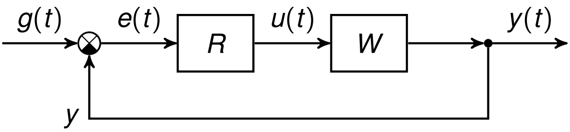
- $W_c(s) = R(s)W(s)$



- $W(s) = W_1(s) + W_2(s)$



- $W_c = \frac{W(s)R(s)}{1+W(s)R(s)}$



Устойчивость системы управления

Устойчивость по Ляпунову.

Definition

Система управления **устойчива по входу**, если ограниченному входу соответствует ограниченный выход.
Система управления **устойчива по начальным условиям**, если ограниченному начальному условию соответствует ограниченный выход.
Система управления **устойчива**, если она устойчива по входу и по начальным условиям.

Definition

Система управления **асимптотически устойчива**, если ее движение, определяемой входом, асимптотически устойчиво.

Система управления должна быть устойчива.

Критерии устойчивости

Устойчивость линейной СУ эквивалентна устойчивости сотвествующей системы ЛДУ. Характкрестическое уравнение: $\alpha(s) = 0$.
Характерестический полином системы стоит в знаменателе ее записи в виде передаточной функции:

$$W(s) = \frac{\beta(s)}{\alpha(s)}.$$

Theorem (Основное условие устойчивости)

Для того чтобы СУ была устойчивой (асимптотически устойчивой) необходимо и достаточно, чтобы все корни λ_i характерестического уравнения удовлетворяли неравенству $\mathrm{Re}\,\lambda_i \leq 0$ ($\mathrm{Re}\,\lambda_i < 0$).

Критерии устойчивости

1. Алгебраические: Гурвица, Льенара-Шипара, Рауса.
2. Частотные. $s = j\omega$, где частота ω изменяется от 0 до $+\infty$.
   - **критерий Михайлова**: $\alpha(s)$ устойчив *LefrRightrarrow* $\Delta \arg \alpha(j\omega) = n\frac{\pi}{2}$.
   - **критерий Найквиста** (для систем с устойчивой передаточной функцией): замкнутая система устойчива тогда и только тогда, когда годограф передаточной функции разомкнутой системы не охватывает точку $(-1, j0)$. Для нейтральных систем с кратностью нуля v при $\omega = 0$ годограф достраивается дугой $(0, -v\frac{\pi}{2})$ достаточно большого радиуса. Годен для систем с чистым запаздыванием!
3. Робастной устойчивости.

Качество системы управления

Под качеством системы управления понимается совокупность показателей, которые характерезуют точность ее работы.

Переходной и установившийся режим:

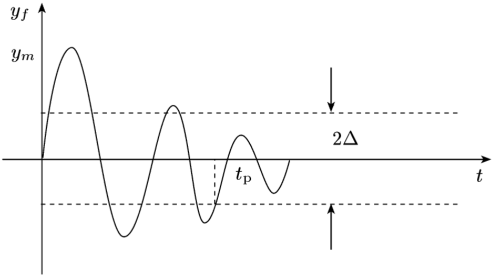
пусть $y(t)$ — выход системы, система устойчива.

$$y(t) = y_0(t) + y_\infty(t),$$

переходной режим $y_0(t)$ определяется начальными условиями и затухает ($\lim_{t\to+\infty} y_0(t) = 0$),

установившийся режим $y_\infty(t)$ не зависит от начальных условий, определяется входом и системой.

Определяются по графику **переходной характеристики системы** — реакции системы на функцию Хевисайда.



1. время регулирования t_p,
2. перерегулирование (запас устойчивости, обычно до 30%) $\sigma = \frac{y_m - y_y}{y_y} \cdot 100\%$,
3. колебательность.

Определяются кореням λ_i характеристического полинома.

1. степень устойчивости $\eta = \min_i \mathrm{Re}\, \lambda_i \;\; t_p \approx \frac{3}{\eta}$,
2. степень колебательности $\mu = \max_i \frac{|\mathrm{Im}\, \lambda_i|}{|\mathrm{Re}\, \lambda_i|}$.

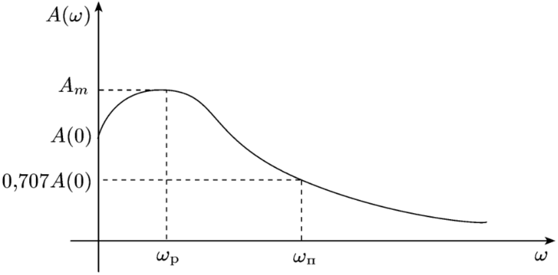
Определяются по частотным характеристикам системы: пусть $W(s)$ — передаточная функция системы.

- Амплитудно-частоная характеристика:
$$A(\omega) = |W(j\omega)|.$$
- Фазово-частоная характеристика:
$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega).$$
- Логарифмическая амплитудно-частоная характеристика:
$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega),$$
измеряется в Дб.

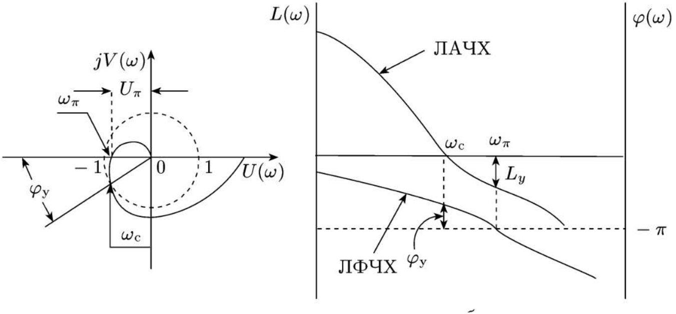
Логарифмические характеристики изображаются на логарифмической шкале частот.

Показатели качества переходного режима

Частотные показатели качества



1. показатель колебательности $A_m/A(0)$. Характеризует степень устойчивости, рекомендуется до $1,5$.
2. резонансная частота ω_p.
3. частота среза ω_{cp}: $A(\omega_{cp}) = 1$.
4. полоса пропускания $[0, \omega_{1/2}]$, $A(\omega_{1/2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}A(0)$.



1. запас устойчивости s_y — расстояние от $(-1, j0)$ до годографа, рекомендуется $0,5\ldots0,8$.
2. запас устойчивости по амплитуде $L_y = -L(\omega_\pi)$, рекомендуется $6\ldots14$ Дб.
3. запас устойчивости по фазе $\varphi_y = \varphi(\omega_c) + \pi$, рекомендуется $30^\circ\ldots60^\circ$.

Показатели качества установившегося режима

Установившийся режим для САУ $Y(s) = W(s)G(s)$:

$$y_\infty(t) = y_{g0}g(t) + y_{g1}\dot{g}(t) + y_{g2}\ddot{g}(t) + \dots, \quad y_{gk} = \frac{1}{k!}\frac{d^k W(\omega)}{d\omega}\bigg|_{\omega=0},$$

где g — вход (задающее воздействие) и $y(t)$ — выход системы.

Аналогично для ошибки регулирования $E(s) = W_{eg}(s)G(s)$ вводятся **коэффициенты ошибок**

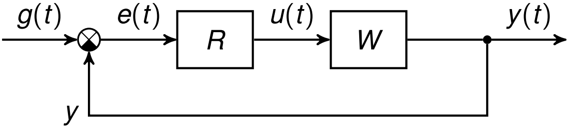
$$e_{gk} = \frac{1}{k!}\frac{d^k W_{eg}(\omega)}{d\omega}\bigg|_{\omega=0}.$$

Система обладает **астатизм r-ого порядка**, если $e_{g0} = \dots = e_{g,r-1} = 0$, $e_{gk} \neq 0$.

Утверждение

Система обладает астатизмом r-ого порядка, если содержит r последовательно соединенных интегрирующих звеньев.

Синтез системы управления



Задача синтеза регулятора:
За счет выбора регулятора $R(s)$ добиться выполнения следующих условий:

1. Замкнтая системы устойчива.
2. Замкнутая система груба (не меняет свойств при малом изменении параметров) и физически реализуема.
3. Удовлетворяет заданным критериям качества.

ПИД регулятор

Пропорционально-Интегрирущий-Дифференцирующий регулятор:

$$R(s) = k_p + k_i\frac{1}{s} + k_d s,$$

где k_p, k_i, k_d — некоторые коэффициенты.

Условие физической реализуемости: $R(s) = k_p + k_i\frac{1}{s} + k_d\frac{s}{Ns+1}$.

Используется для управления типовыми объектами 1-2-ого порядка:

$$W_1(s) = \frac{K}{1+sT}e^{-s\tau}, \quad W_2(s) = \frac{K}{(1+sT_1)(1+sT_2)}, \quad W_3(s) = \frac{K}{s(1+sT)},$$

гарантированно решает задачу стабилизации для объекта 2-ого порядка.

Подбор коэффициентов ПИД регулятора

Используя модели объектов управления $W_1(s)$, $W_2(s)$ можно оценить влияние коэффициентов ПИД-регулятора на показатели качества САУ.

$$R(s) = k_p + k_i\frac{1}{s} + k_d s,$$

	время нарастания	время регулирования	установившаяся ошибка	колебательность	перерегулирование
k_p	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$
k_i	$\searrow$, слабо	$\searrow$, слабо	0	$\nearrow$	$\nearrow$
k_d	не влияет	не влияет	не влияет	$\searrow$	$\searrow$

Метод обратной задачи динамики

Пусть имеется нелинейный ОУ:

$$\ddot{y} = f(\dot{y}, y, t) + bu,$$

где y — выход, u — управление, g — задающее воздействие.

1. Пусть ошибка управления $e = g - y$ удовлетворяет уравнению (задали качество САУ):

$$\ddot{e} + k'\dot{e} + k''e = 0.$$

2. Подставим выражение $e = g - y$ в уравнение для ошибки:

$$\ddot{g} - (f(\dot{y}, y, t) + bu) + k'\dot{e} + k''e = 0.$$

3. Выразим управление:

$$u = \frac{1}{b}(k'\dot{e} + k''e + \ddot{g} - f(\dot{g} - \dot{e}, g - e, t)).$$

Для линейного ОУ

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 = bu,$$

получаем ПД-регулятор с компенсацией динамического запаздывания:

$$u = \frac{1}{b}\left[(k' - a_1)p + (k'' - a_0)\right] e + \frac{1}{b}\left[p^2 + a_1 p + a_0\right] g.$$

Ни регулятор, ни компенсатор физически неосуществимыми.

Астатизма можно добиться прибавив к управлению

$$\alpha \int\limits_0^t e(\tau)d\tau + \frac{\alpha}{\lambda_1\lambda_2}[(\lambda_1 + \lambda_2)e + \dot{e}] = 0,$$

где λ_1 и λ_2 — характеристические числа уравнения задающего ошибку.

Синтез регулятора по желаемой передаточной функции

Общая схема синтеза

Имеем: модель ОУ $W(s)$, заданные показатели качества САУ.

1. Два пути:
   - Выбираем желаемую $W_g(s)$, удовлетворяющую показателям качества, из некоторого класса ПФ.
   - Переводима показатели качества в ограничения на ЛАЧХ разомкнутой системы, строим ЛАЧХ, а по ней желаемую ПФ разомкнутой системы.
2. Синтез регулятора $R(s)$ по желаемой ПФ с учетом ограничений грубости и физической реализуемости.

Семейство ПФ, описывается двумя параметрами: порядком n и частотой среза w_0.
АЧХ имеет вид

$$A_b(\omega) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2n}}.$$

Характеристики фильтров $W_b(s) = \frac{1}{\xi_n(s/\omega_0)}$ (время регулирования t_p, перерегулирование σ, подавление высокочастотных помех δ_N):

$\xi_n(s)$	$\omega_0 t_p$	σ	δ_N
$s+1$	3	0	1/3
$s^2+1.41s+1$	2,5	0,05	2/9
s^3+2s^2+2s+1	6	0,09	8/27

Выбор желаемой ПФ
Метод ЛАЧХ

Желаемая ПФ разомкнутой системы :

$$W_g p(s) = \frac{k_p \prod_{i=1}^{m} (T_i' s + 1)}{s^r \prod_{i=1}^{n} (T_i s + 1)},$$ где T_i, T_i' различны и положительны.

ЛАЧХ имеет вид

$$L_{gp}(\omega) = 20 \lg k_p - 20k \lg \omega + \sum_{i=1}^{m} 20 \lg |1 + (\omega T_i')^2|^{\frac{1}{2}} - \sum_{i=1}^{m} 20 \lg |1 + (\omega T_i)^2|^{\frac{1}{2}}.$$

Асимптотическая ЛАЧХ $\tilde{L}_{gp}(\omega)$ получается, если считать

$$20 \lg |1 + (\omega T_i)^2|^{\frac{1}{2}} \approx \begin{cases} 0, & \omega < \frac{1}{T_i}, \\ 20 \lg \omega, & \omega \geq \frac{1}{T_i}. \end{cases}$$

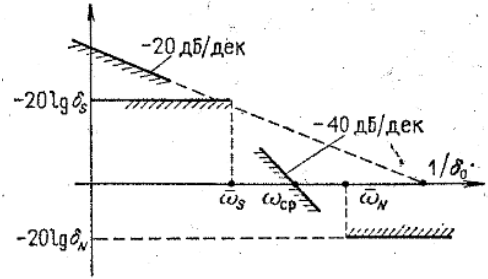
По теореме Боде ЛФЧХ приближается **асимптотической ЛФЧХ**

$$\tilde{\varphi}(\theta) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{20} \frac{d\tilde{L}(\theta)}{d\theta},$$ где $\theta = \lg \omega$.

Выбор желаемой ПФ

Метод ЛАЧХ. Пример

Типичные ограничение на ЛАЧХ разомкнутой системы, вызванные заданными показателями качества.



Заданы: астатизм и ограничение на ошибку по скорости (δ_0), ограничения на амплитудное искажение сигнала (δ_s и ω_s), требование на подавление высокочастотных помех (δ_N, ω_N), ограничения на запасы устойчивости могут быть заданы в окрестности ω_{cp}.

Синтез регулятора по заданной ПФ

Передаточная функция замкнутой системы имеет вид

$$\frac{R(s)W(s)}{1+W(s)R(s)} = W_g(s) \Rightarrow R(s) = \frac{1}{W}\frac{W_g}{1-W_g}.$$

Нельзя допускать сокращения неустойчивых нулей и полюсов $W(s)$ за счет $R(s)$. Требуется факторизация $W(s)$ по этому признаку, $W_g = \frac{\beta_+\beta_-}{\alpha_+\alpha_-}$, α_+, β_+ — неустойчивые и нейтрально устойчивые.

На $W_g(s)$ накладываются ограничения, $G(s)$ — ее знаменатель.

$$W_g(s) = \frac{\beta_+(s)M(s)}{G(s)},$$

$$1 - W_g(s) = \frac{\alpha_+(s)N(s)s^r}{G(s)}.$$

Регулятор имеет вид $R(s) = \frac{\alpha_-(s)M(s)}{\beta_-(s)N(s)s^r}$, полиномы $M(s)$ и $N(s)$ находятся по $G(s)$.