Лекция 4.
“Ведение в теорию управления, ч.2”

Гончаров Олег Игоревич

Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики
Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова

Москва

Дискретные системы

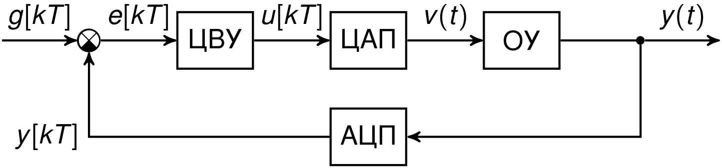
Присутствует квантование по уровню или по времени.

- Сигнал квантован по времени — импульсные,
- Сигнал квантован по уровню — релейные, квантованные.
- Сигнал квантован по уровню и по времени — цифровые.

При наличии квантования по уровню с большим числом уровней, можно считать, что квантование по уровню отсутствует. Погрешность, вносимую квантованием, можно рассматривать как возмущение.

1. Приближение интегрирования конечными разностями.
2. Исследование ДС, описываемых разностными уравнениями.

Структура цифровой системы управления



Решетчатая функция: $y[(k+\varepsilon)T] \stackrel{def}{=} y(kT+\varepsilon T)$. Отражает квантование по времени.

T — **период квантования.**

$\frac{1}{T}$ — **частота дискретизации.**

$f_H = \frac{1}{2T}$, $\omega_H = \frac{\pi}{T}$ — **частота Найквиста.**

Математическое описание импульсных систем

Разностные уравнения

$$y(t+nT)+a_{n-1}y(t+(n-1)T)+\cdots+a_0y(t)=b_mu(t+nT)+\cdots+b_0u(t),$$

Символьная запись оператора сдвига по времени:

$$Ex(t)\overset{def}{=}x(t+T).$$

Вход-выход в символьной записи:

$$(E^n+a_{n-1}E^{n-1}+\cdots+a_0)y=(b_mE^m+\cdots+b_0)u,$$
$$\alpha(E)y=\beta(E)u,$$
$$y=W(E)u.$$

Z-преобразование:

$$X^*(z) \overset{def}{=} Z\{x[lT]\} = \sum_{l=0}^{+\infty} x[lT]z^{-l},$$

$x[lT] = 0$ при $l < 0$, существуют M и q такие, что $|x[lT]| < Mq^l$.

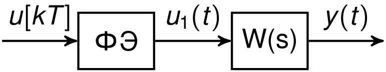
Свойства:

1. линейность,
2. $Z\{x[(l-m)T]\} = z^{-m}Z\{x[lT]\}$,
3. $Z\{x[(l+1)T]\} = zX^*(z) - x[0 \cdot T]$.

Посредством применения к уравнению вход-выход z-преобразования получаем представление системы при помощи передаточной функции:

$$\alpha(E)y = \beta(E)u \to Y^*(z) = \frac{\beta(z)}{\alpha(z)}U^*(z), \quad Y^*(z) = W^*(z)U^*(z).$$

Амплитудно-импульсная модуляция

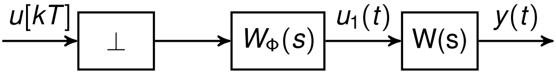


Амплитуда выходного сигнала пропорциональна амплитуде входного:

$$u_1(t) = \sum_{i=0}^{\infty} u[iT] w_\Phi(t - iT),$$

где $w_\Phi(t)$ — весовая функция **формирующего звена**, $w_\Phi(t) = 0$ при $t < 0$.

Введем **импульсное звено**, для которого $w_\Phi(t) = \delta(t)$ (дельта-фунция), схема перепишется в виде:



где $W_\Phi(s) = L\{w_{\Phi(t)}\}$.

Амплитудно-импульсная модуляция

Переход к дискретной модели

$$\xrightarrow{u[kT]} \boxed{\perp} \xrightarrow{u_1(t)} \boxed{W_\Pi \overset{def}{=} W_\Phi(s)W(s)} \xrightarrow{y(t)}$$

$$y(t) = \int_0^{+\infty} w_\Pi(t-\tau)u_1(\tau)d\tau = \sum_{i=0}^{\infty} w_\Pi(t-iT)u[iT].$$

где весовая функция **преобразованной непрерывной части** $w_\Pi(t) = L^{-1}\{W_\Pi(s)\}$.

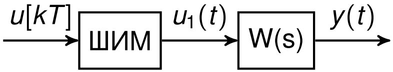
$$y[lT] = \sum_{i=0}^{l} w_\Pi[(l-i)T]u[iT].$$

После применения z-преобразования:

$$Y^*(z) = W_\Pi^*(z)U^*(z),$$

где $W_\Pi^*(z) = Z_T\{w_\Pi(t)\} \overset{def}{=} Z\{L^{-1}\{W_\Pi(s)\}\}$.

Широтно-импульсная модуляция



ШИМ-элемент выдает импульсы амплитудой A с периодом T, длительность импульса пропорциональна $|u[lT]|$.

$$u_1(t) = \sum_{i=0}^{\infty} A \operatorname{sgn} u[iT] \left[1(t - iT) - 1(t - (i - \gamma_i)T)\right],$$

$$\gamma_i = \sigma |u[iT]|,$$

где A — амплитуда импульсов, σ – коэффициент модуляции, удовлетворяет $0 < \sigma < \inf 1/|u(t)|$.

1. Нелинейна,
2. Линеаризация: разложим переходную характеристику $W(s)$ в ряд Тейлора в т. $(t - iT)$:

$$h(t - (i + \gamma_i)T) = h(t - iT) + \gamma_i Tw(t - iT) + \underline{O}(\dot{w}T^2).$$

Получаем при $T\dot{w} \ll 1$

$$y[lT] = \sigma AT \sum_{i=0}^{\infty} w[(l - i)T]e[iT].$$

Таким образом при $T\omega_{1/2} \ll 1$ ШИМ эквивалентна домножению на коэффициент σAT, где $\omega_{1/2}$ — частота полосы пропускания.

$f(t)$ — оригинал, $F(s)$ и $F^*(z)$ — изображения:

$$F^*(e^{j\omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} F\left(j\omega + jm\frac{2\pi}{T}\right).$$

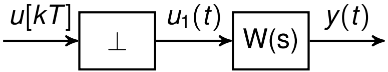
Частотные характеристики:

$$A(\omega) = |W^*(e^{j\omega T})|, \; \varphi(\omega) = \arg W^*(e^{j\omega T}).$$

Имеют тот же смысл, что и в непрерывном случае.
Частотные критерии устойчивости остаются в силе, частота изменяется в интервале $[0, \omega_H]$. (ω_H — частота Найквиста).

Связь непрерывных и дискретных систем

Непрерывная модель дискретной системы



$$W_{\Pi}(s) = \frac{1 - e^{-\gamma Ts}}{s} W(s) W^*(e^{j\omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{l=-\infty}^{\infty} W_{\Pi}(s + jl\frac{2\pi}{T}).$$

Если $W(jw) \ll 1$ при $\omega > \omega_H$, где $\omega_H = \frac{\pi}{T}$, то можно говорить о непрерывной модели дискретной системы:

$$W_H(s) = e^{-\frac{sT}{2}} W(s) \text{ или } W_H(s) = W(s).$$

Синтез регулятора в виде дискретного фильтра для непрерывного объекта

Теория дискретных систем позволяет свести задачу синтеза цифрового регулятора для непрерывной системы к синтезу дискретного регулятора для дискретного объекта.
Особенности:

1. Оспределение устойчивости неперерывной и импульсной системы не совпадает: требуем $|W(j\omega)| << 1$ при $\omega > \omega_H$.
2. Ограничение на абсолютное значение коэффициента усиления регулятора. (В системе — запаздывание).